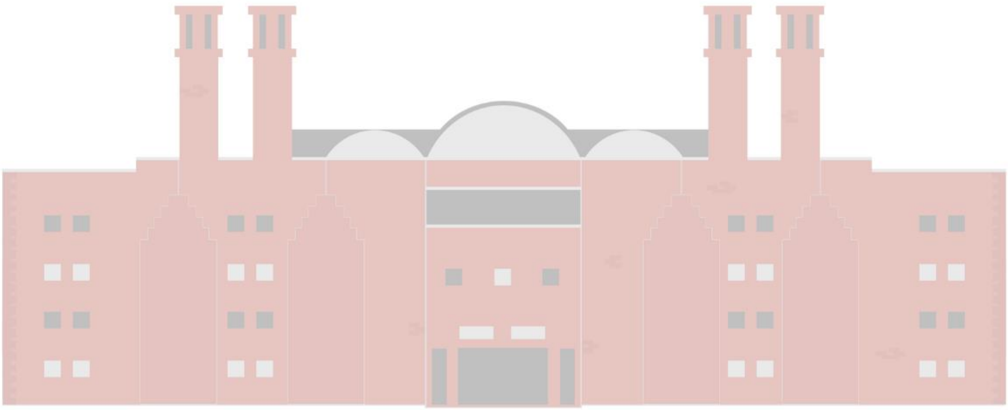
RED BUILDING TEAM

التحليل العددي

المحاضرة الخامسة

5 صفحات



الدكتور: عماد فتاش

التاريخ: ٢٠١٤/١٠/٢١

المعادلات:

خطية وغير خطية.

- حل المعادلات اللاخطية.

أمثلة:

١. $f(x) = ax^2 + bx + c$

إذن هذه المعادلة غير خطية لأن درجتها 2<1 وجذورها

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$$

٢. $x^2 + xsinx - 1 = 0$ معادلة غير خطية

٣. $x^2 e^x - x\ln\left|\frac{cosx}{x^3}\right| - \frac{3}{x} = 0$ معادلة غير خطية

٤. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$

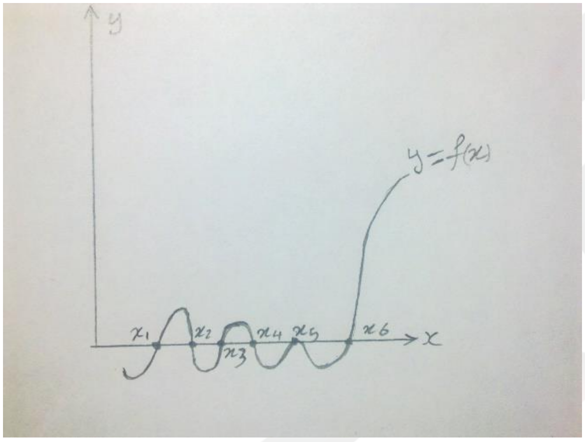
- **الرسم البياني:**

ليكن لدينا المنحني الذي في الشكل

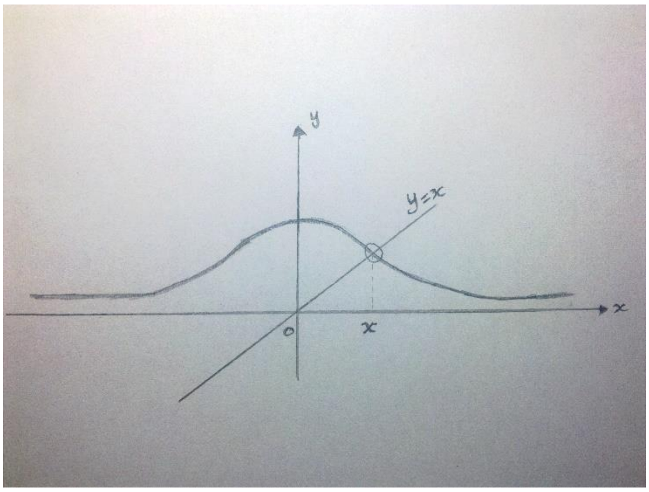
إن النقاط الظاهرة في الشكل

ماهي الا حلول للمعادلة $f(x) = 0$

اي نقاط تقاطع $y = f(x)$ مع OX



مثال: ليكن لدينا المعادلة الاخطية: $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$



سوف نكتب المعادلة بطريقة اخرى $x(x^2+1) = 1$

$$x = \frac{1}{x^2+1}$$

وكأنني وصلت إلى تابع جديد من الشكل

$$f_1(x) = x = f_2(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y = f_2(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad , \quad Y = f_1(x) = x$$

نقطة التقاطع لـ $Y = f_1(x)$ مع $y = f_2(x)$ هي حل للمعادلة $f(x) = 0$

يوجد اكثير من الخيارات والطرق لحل المعادلة ومنها طريقة الرسم ولكنها تكتفي باعطائي معلومات من طبيعة المعادلة وليس الحل ولذلك سنلجأ الى طريقة تساعدنا

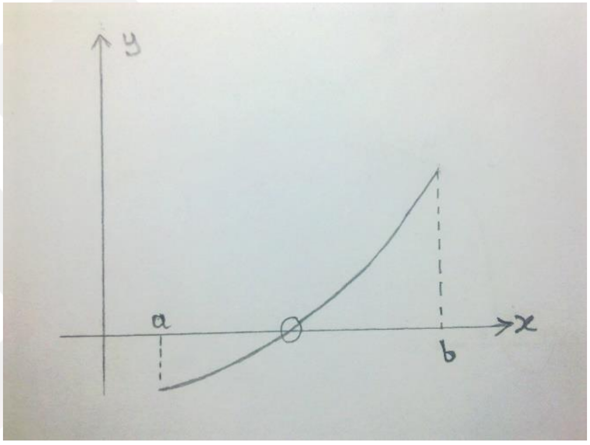
في حل المعادلة و ذلك ب:

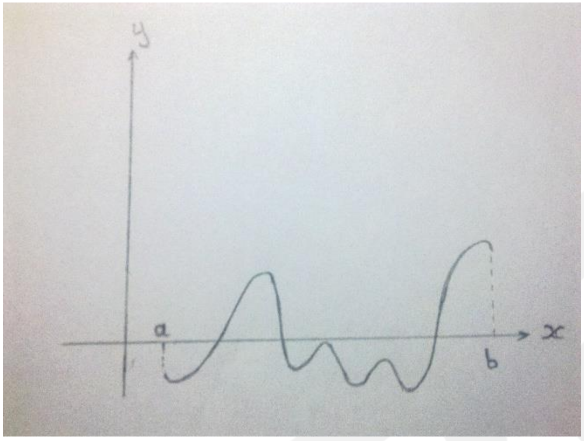
- **عزل وحصر الجذور للمعادلة اللاخطية $f(x) = 0$:**

$$f(x) = 0 \qquad ,[a,b]$$

اذا كانت $f(a).f(b) < 0$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً على الأقل في المجال $[a,b]$

صفر ≡ جذر ≡ حل





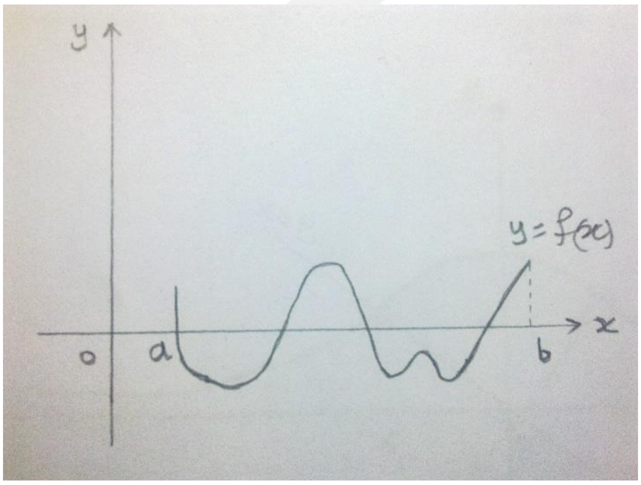
مثال: ? $f(a).f(b) < 0$ نجد أن الشرط غير محقق للشرط السابق.

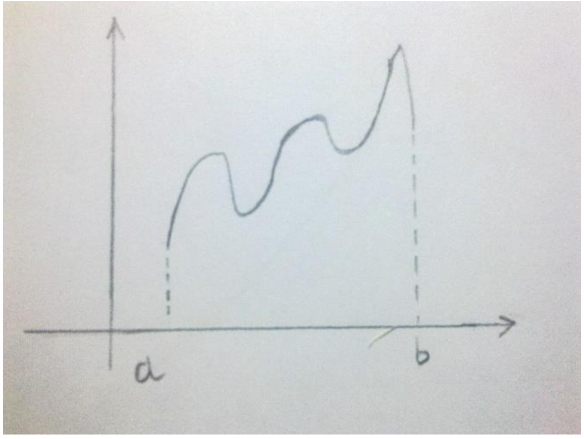
إذن سوف نلجأ الى تجزيء المجال الى مجالات صغيرة $[a,b]$

$[a_1,b_1]$ $\qquad f(a_1).f(b_1)$

$[a_2,b_2]$ $\qquad f(a_2).f(b_2)$

$[a_n,b_n]$ $\qquad f(a_n).f(b_n)$





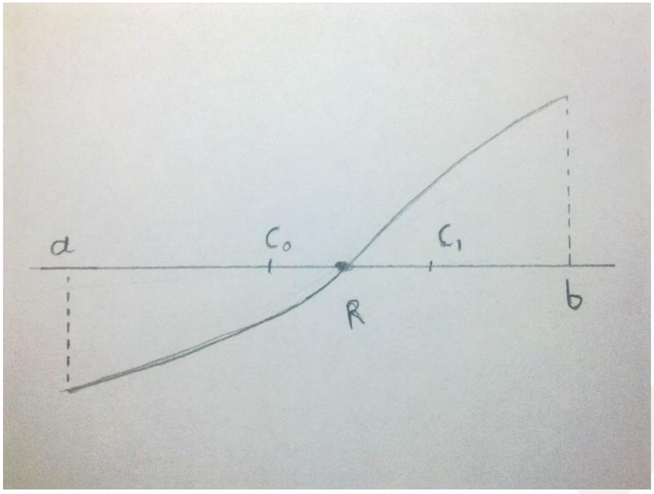
ويمكن بهذه الطريقة إيجاد جذور للتابع.

- إلا في حالات خاصة متل التابع التالي : (الرسمة)

فهذا التابع في كلا الحالتين لايوجد جذور للدالة.

- **الطرق العددية في حل المعادلة اللاخطية $f(x) = 0$:**

طريقة تنصيف المجال (التنصيف المتكرر):



ليكن لدينا $f(x) = 0$ على المجال $[a, b]$

سنفرض أن الشرط محقق $f(a)f(b) < 0 \Leftarrow$ يوجد حل.

سوف ننصف المجال $[a, b]$ إلى $[c_0, b]$ و $[a, c_0]$

في المجال $[a, c_0]$ لا يوجد حل

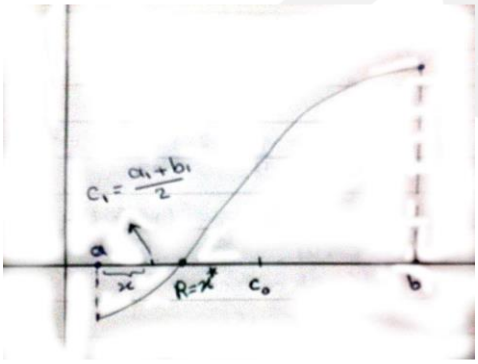
أما $[c_0, b]$ $f(c_0)f(b) < 0$

ومن جديد سوف ننصف المجال $[c_0, b]$ الى مجالين:

١_ $[c_0, c_1]$ $f(c_0)f(c_1) < 0$ وهكذا...

2_ $[c_1, b]$ لم تحقق الشرط

مثال: ليكن لدينا التابع من الشكل :



نفرض أن $f(a).f(b) < 0$ على المجال $[a_0,b_0]=[a,b]$

بما أن $f(a_0).f(b_0) < 0$ سوف نقسم المجال الى مجالين

وتكون نقطة المنتصف : $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ فأصبح لدينا

$[c_0,b_0]$, $[a_0,c_0]$

من خلال الرسم نجد أن المجال $[a_0,c_0]$ حقق الشرط

لأن $f(a_0)$ سالب و$f(c_0)$ موجب ،أما المجال $[c_0,b_0]$ لم يحقق الشرط

لأن $f(b_0)$ موجب و$f(c_0)$ موجب.

نفرض أن $[a_1, b_1] = [a_0, c_0]$ ونستمر في تقسيم المجال بعد أن نختبره فيما اذا كان محققا للمتراجحة أم لا .

$$c_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \dots \dots \dots f(c_1)$$

$$c_n = \frac{a_n+b_n}{2} \dots \dots \dots f(c_n)$$

وبالتالي نحن أمام متتاليتين من الشكل:

١- $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = R = x^*$$

٢- $\{f(c_n)\}_{n=0}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = 0$$

وستكون المتراجحة من الشكل : $a_n < c_n < b_n$

$c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ حيث أن : n=0,1,2……. و c_n منتصف المجال $[a_n, b_n]$

ثابت الخطأ:

$|R - c_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$ حيث: n=0,1,2……. ، R: الجذر، الحل $f(x) = 0$

C_n: الحل في الخطوة n بطريقة منتصف المجال

مثال : ليكن لدينا $f(x) = 0$ على المجال $[a,b]$ اوجد الحل بطريقة تنصيف المجال بدقة $\varepsilon = 10^{-d}$.

الحل: نفترض أن x^*=R الحل الفعلي ونفترض أيضا أن $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية من القيم مشكلة بطريقة تنصيف المجال لتقترب من الحل:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = R = x^*$$

من أجل $x_0, x_1, x_2, \dots xn, \dots$ في كل خطوة من حسابها $(x_0, x_1, x_2 \dots)$ نقارن الناتج ب ε وذلك عبر:

شرط الدقة (التوقف) الذي يعطى بالعلاقة: $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

ونستمر بذلك حتى يتحقق هذا الشرط فمثلا اذا تحقق نقول:

$R \approx x_n$ بدقة $\varepsilon = 10^{-d}$

تتميز هذه الطريقة عن سواها بإمكانية تحديد الخطوات اللازمة لبلوغ الهدف .

تحديد عدد الخطوات n في طريقة تنصيف المجال لبلوغ دقة ما $\varepsilon = 10^{-k}$.

من خلال العلاقة : $n + 1 \geq \frac{\log(b-a)+k}{\log 2}$

مثال: كم مرة يجب أن نطبق فيها طريقة تنصيف المجال لإيجاد جذر للمعادلة

$$f(x) = 5x - 8\ln x - 8 = 0$$

بدقة $\varepsilon = 10^{-3}$ على المجال [0,1].

$$f(0) = +\infty > 0 \ , f(1) = 5 - 8 = -3 < 0$$

تحقق الشرط $f(0)f(1) < 0$ اذن يوجد حل

$$n + 1 \geq \frac{\log(1-0)+3}{\log 2} = 9.96578 \Rightarrow n + 1 \geq 10 \Rightarrow n \geq 9$$

أي أن من ال9 خطوات فمابعد تكون الدقة محققة .

ملاحظة: دائما نقرّب العدد الى الصحيح الأكبر مهما كان الجزء العشري صغير أم كبير

أي: $9.96578 \approx 10$

والآن نقوم بتقسيم المجال وذلك بايجاد نقطة المنتصف: $x_0 = \frac{0+1}{2} = 0.5$ وبذلك أصبح لدينا المجال [0,0.5]and[0.5,1] ومن ثم نوجد $f(0.5) = 0.0452 > 0$ وبالتالي يمكننا الآن التحقق من المجالات فيما اذاكانت تحقق المتراجحة $f(a).f(b) < 0$ ومعرفة اذا كان الحل موجود في هذا المجال أم لا.

$[0,0.5] \Rightarrow f(0)f(0.5) > 0 \Rightarrow$ غيرمحقق

$[0.5,1] \Rightarrow f(0.5)f(1) < 0 \Rightarrow$ محقق

وبذلك سنقوم بتجزيء المجال [0.5,1] بحساب نقطة المنتصف فيه $x_1 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$

$f(0.75) = -1.9485 < 0$ ونعود لنتحقق من المجالين الجديدين :

$[0.5,0.75] \Rightarrow f(0.5)f(0.75) < 0$ محقق

$[0.75,1] \Rightarrow f(0.75)f(1) > 0$ غيرمحقق

ونستمر على نفس المنوال حتى نصل لحساب $x_9 = 0.504$ و $x_{10} = 0.50435$

لا تحسب الناس في الدنيا على ثقة
من أمرهم، بل على ظن وتخييل
حب الحياة ،وبغض الموت أورثهم
جبن الطباع ،وتصديق الأباطيل